תשובות לבחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשס"ג – מועד א'

1. א. נתון המשפט שלכל קבוצת פסוקים Γ קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ יש מודל. הוכח מכאן את משפט הקומפקטיות.

תשובה. תהי Γ קבוצת פסוקים שאינה עקבית, נוכיח שאינה עקבית מקומית. Γ אינה קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$, כי אלו היתה קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$ היה לה מודל לפי המשפט הנתון. לכן קיימת הוכחה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ב-$\mathfrak{D}_0$ מ-Γ של סתירה טאוטולוגית σ. תהי Δ הקבוצה הסופית של פסוקי Γ המופיעים בסידרת פסוקים זאת, ואז הסידרה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ היא גם הוכחה של של σ ב-$\mathfrak{D}_0$ מ-Δ. מכיוון שמערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ נאותה קיים $\Delta \models \sigma$ ומכיוון ש-σ סתירה זה אומר ש-Δ אינה עיקבית ולכן Γ אינה עקבית מקומית.

ב. תהי L שפה של תחשיב היחסים. לפסוק ϕ של L נסמן ב-$\mathrm{Models}(\phi)$ את קבוצת (מחלקת) המודלים של ϕ. יהיו $A = \mathrm{Models}(\phi)$ ו- $B = \mathrm{Models}(\psi)$. הבע באמצעות A ו-B את $\mathrm{Models}(\phi \wedge \psi)$, את $\mathrm{Models}(\phi \vee \psi)$ ואת $\mathrm{Models}(\phi \to \psi)$.

תשובה. $\mathrm{Models}(\phi \wedge \psi) = A \cap B$ כי $\phi \wedge \psi$ אמיתי במבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ אם כל אחד משני הפסוקים ϕ ו-ψ אמיתי בו. $\mathrm{Models}(\phi \vee \psi) = A \cup B$ כי $\phi \vee \psi$ אמיתי במבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ אסם לפחות אחד הפסוקים ϕ ו-ψ אמיתי בו. $\mathrm{Models}(\phi \to \psi) = A^c \cup B$, היכן ש- A^c היא הקבוצה המשלימה ל-A בקבוצת (מחלקת) כל המבנים, כלומר היא קבוצת (מחלקת) כל המבנים שאינם ב-A, כי $\phi \to \psi$ אמיתי במבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ אסם ϕ אינו אמיתי ב-$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ או ש-ψ אמיתי בו.

ג. למשתנה x הגדר ברקורסיה על יצירת הנוסחה ϕ פונקציה F על קבוצת הנוסחאות כך ש- $F(\phi) = 1$ אם x חופשי ב-ϕ ו- $F(\phi) = 0$ אחרת.

לפסוק אטומי ϕ $\;F(\phi) = 1$ אם x מופיע ב-ϕ ו- $F(\phi) = 1$ אחרת.

$F(\neg\phi) = F(\phi)$.

לקשר דו-מקומי $\square$ $\;F(\phi \square \psi) = \max(F(\phi), F(\psi))$.

לכמת Q $\;F(\mathsf{Qx}\phi) = 0$, ולמשתנה y השונה מ- x $\;F(\mathsf{Qy}\phi) = F(\phi)$.

ד. תהי L שפה של תחשיב היחסים שקבועיה היחידים הם סימן השוויון $\approx$ וסימן הפעולה החד-מקומי F.

(i) כמה מבנים יש ל-L שעולמם הוא הקבוצה $\{0,1\}$?

(ii) מהן מחלקות השקילות של יחס האיזומורפיזם בין מבנים אלו? כאשר הנך טוען ששני מבנים איזומורפיים הצבע רק על האיזומורפיזם ואל תוכיח שזה איזומורפיזם. לכל אחת ממחלקות האיזומורפיזם כתוב פסוק שהוא אמיתי בכל אחד מן המבנים במחלקה ואינו אמיתי ביתר המבנים, אולם אל תוכיח זאת.

תשובה. (i) מכיוון שהערך של $\approx$ קבוע מספר המבנים שעולמם הוא הקבוצה $\{0,1\}$ הוא כמספר הפונקציות מ- $\{0,1\}$ ל- $\{0,1\}$ שהוא $2^2 = 4$.

(ii) מחלקות השקילות הן E_1 המכילה את שני המבנים $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ בהם $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{F})$ (בסימון אחר $\mathsf{F}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$) הוא פונקציה קבועה, E_2 המכילה את המבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ בו $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{F})$ היא פונקצית הזהות, ו-E_3 המכילה את המבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ בו $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{F})(0) = 1$ ו- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{F})(1) = 0$.

הפסוק $\forall\mathsf{x}\forall\mathsf{y}(\mathsf{F}(\mathsf{x}) \approx \mathsf{F}(\mathsf{y}))$ אמיתי רק במבני E_1, הפסוק $\forall\mathsf{x}(\mathsf{F}(\mathsf{x}) \approx \mathsf{x})$ אמיתי רק במבנה של E_2, והפסוק $\forall\mathsf{x}\neg(\mathsf{F}(\mathsf{x}) \approx \mathsf{x})$ (בכתיב אחר $\forall\mathsf{x}(\mathsf{F}(\mathsf{x}) \not\approx \mathsf{x})$) אמיתי רק במבנה של E_3.

הערה. כאשר ניגשים לענות על שאלה זאת חושבים, ברמה לא פורמלית, אם יש תכונות המבחינות בין המבנים השונים שהן ניתנות לניסוח בשפה. תכונות אלו הובעו ע"י פסוקים כפי שראינו. היה אפשר לחשוב שקיימת גם תכונה המבחינה בין שני המבנים ב-E_1, כי באחד הערך הקבוע

של $\mathcal{A}(\mathsf{F})$ הוא 0 ובחברו הוא 1, אולם זאת איננה תכונה הניתנת לניסוח בשפה כי אין בשפה שם עצם שערכו באחד המבנים הוא, נאמר, 0. האיזומורפיזם H בין שני המבנים של E_1 נתון ע"י $H(0) = 1$, $H(1) = 0$.

2. תהי $\phi(\mathsf{c})$ הנוסחה המתקבלת מהצבת הקבוע האישי c עבור המשתנה x בנוסחה $\phi(\mathsf{x})$.
א. הבע את הערך $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c}))$ (בסימון אחר, $\phi(\mathsf{c})^{\mathcal{A},s}$) של הנוסחה $\phi(\mathsf{c})$ במבנה $\mathcal{A}$ ובהשמה s באמצעות הערך $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi(\mathsf{x}))$ (בסימון אחר, $\phi(\mathsf{x})^{\mathcal{A},s'}$) של הנוסחה $\phi(\mathsf{x})$ במבנה $\mathcal{A}$ ובהשמה מתאימה s'.
ב. יהי t שם עצם ו-$t(\mathsf{c})$ שם העצם המתקבל ממנו ע"י הצבת הקבוע האישי c עבור המשתנה x. נסח את הטענה המקבילה ל-א' עבור שם העצם $t(\mathsf{c})$.
ג. הוכח את השוויון המתקבל ב-א', כאשר מותר לך להניח את השוויון של ב'. בהוכחה זאת מותר לכך להשתמש בעובדות תחביריות (כלומר שאינן מתייחסות לערכי אמת) ידועות על פעולת ההצבה של קבוע אישי למשתנה, כל עוד אתה מנסח עובדות אלו בברור.

תשובה. א. $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi(\mathsf{x}))$ כאשר $s' = s\binom{\mathsf{x}}{\mathcal{A}(\mathsf{c})}$, כלומר s' היא השמה המקיימת $s'(\mathsf{y}) = s(\mathsf{y})$ לכל משתנה y השונה מ-x ו- $s'(\mathsf{x}) = \mathcal{A}(\mathsf{c})$.
ב. $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, t(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', t(\mathsf{x}))$, כאשר s' כמו ב-א'.
ג. ההוכחה היא באינדוקציה על יצירת ϕ. נטפל במקרים השונים.
(i). ϕ היא נוסחה אטומית $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$, היכן ש-$\mathsf{R}$ הוא סימן יחס n-מקומי ו- $t_1, \ldots, t_n$ שמות עצם. לפי הגדרת ההצבה קיים $\phi(\mathsf{c}) = \mathsf{R}(t_1(\mathsf{c}), \ldots, t_n(\mathsf{c}))$ ולכן לפי השוויון ב-ב' ולפי הגדרת האמת קיים

$$\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \mathsf{R}(t_1(\mathsf{c}), \ldots, t_n(\mathsf{c})))$$
$$= \mathcal{A}(\mathsf{R})(\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, t_1(\mathsf{c})), \ldots, \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, t_n(\mathsf{c})))$$
$$= \mathcal{A}(\mathsf{R})(\mathrm{val}(\mathcal{A}, s', t_1), \ldots, \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', t_n)) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi)$$

(ii). $\phi = \psi_1 \Box \psi_2$ היכן ש-$\Box$ קשר דו מקומי. לפי הגדרת ההצבה קיים $\phi(\mathsf{c}) = \psi_1(\mathsf{c}) \Box \psi_2(\mathsf{c})$. לפי הנחת האינדוקציה $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \psi_i(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \psi_i(\mathsf{x}))$, עבור $i = 1, 2$. לכן קיים, לפי הגדרת ההצבה ולפי הגדרת האמת,

$$\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \psi_1(\mathsf{c}) \Box \psi_2(\mathsf{c}))$$
$$= t_\Box(\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \psi_1(\mathsf{c})), \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \psi_2(\mathsf{c})))$$
$$= t_\Box(\mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \psi_1), \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \psi_2)) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \psi_1 \Box \psi_2) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi)$$

(iii). $\phi = \neg\psi$. ההוכחה דומה לגמרי להוכחה במקרה של $\phi = \psi_1 \Box \psi_2$.
(iv). $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{y}\psi$, כאשר Q כמת ו-y משתנה השונה מ-x. לפי הגדרת ההצבה קיים $\phi(\mathsf{c}) = \mathsf{Q}\mathsf{y}\psi(\mathsf{c})$. לכן, כאשר $\mathsf{Q} = \forall$, קיים לפי הגדרת האמת

$$\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \forall\mathsf{y}\psi(\mathsf{c})) = \min_{a \in A} \mathrm{val}(\mathcal{A}, s\tbinom{\mathsf{y}}{a}, \psi(\mathsf{c}))$$

שימוש בהנחת האינדוקציה ביחס לנוסחה ψ, עם ההשמה $s\binom{\mathsf{y}}{a}$, נותן

$$= \min_{a \in A} \mathrm{val}\left(\mathcal{A}, s\tbinom{\mathsf{y}}{a}\tbinom{\mathsf{x}}{\mathcal{A}(\mathsf{c})}\right) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s\tbinom{\mathsf{x}}{\mathcal{A}(\mathsf{c})}, \forall\mathsf{y}\psi) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s', \phi)$$

אם $\mathsf{Q} = \exists$ ההוכחה היא אותה, בהחלפת $\min$ ב- $\max$.
(v). $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{x}\psi$, כאשר Q כמת. לפי הגדרת ההצבה $\phi(\mathsf{c}) = \phi$. לכן, מכיוון ש-x אינו חופשי ב-ϕ ולפי משפט שהוכח, ערך ϕ אינו תלוי ב- $s(\mathsf{x})$,

$$\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(\mathsf{c})) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi) = \mathrm{val}(\mathcal{A}, s\tbinom{\mathsf{x}}{\mathcal{A}(\mathsf{c})}, \phi)$$

3. א. תהי Γ קבוצת פסוקים בשפה L שהיא קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$, ויהי ϕ פסוק כלשהו בשפה L. אז לפחות אחת הקבוצות $\Gamma \cup \{\phi\}$ ו- $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.
ב. תהיינה Γ_i, $i \in N$ קבוצות פסוקים בשפה L שכל אחת מהן קונסיסטנטית במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$, כך ש- $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ כאשר $i < j$. הוכח כי הקבוצה $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ גם היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

הערה. הטענות בשאלה זאת מהוות חלק מהוכחת משפט השלמות ומשפט קיום המודל למערכת

ההיסק $\mathfrak{D}_0$ ולמשפט הקומפקטיות הנובע מהם ולכן אין להשתמש במשפטים אלו בהוכחת הטענות שבשאלה.

תשובה אחת. א. אם $\Gamma \cup \{\phi\}$ אינה קונסיסטנטית אז קיימת סתירה טאוטולוגית σ כך ש- $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_{\mathfrak{D}_0} \sigma$, ולכן לפי משפט ההיסק $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi \to \sigma$. $\phi \to \sigma \to \neg\sigma$ היא טאוטולוגיה ולכן, לפי משפט שהוכח, היא יכיחה ב-$\mathfrak{D}_0$ ולכן היא יכיחה מ-Γ ב-$\mathfrak{D}_0$. קיים $\phi \to \sigma, (\phi \to \sigma) \to \neg\sigma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg\sigma$ בשימוש בכלל הניתוק, ולכן לאור טרנזיטיביות היכיחות קיים $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg\phi$. (אפשר כאן גם להשתמש ישירות בכלל ההיסק הנגזר האומר שאם פסוק χ גורר טאוטולוגית פסוק ρ אז ρ מתקבל מ-χ). באותו אופן, מכיוון שגם $(\neg\phi \to \sigma) \to \phi$ היא טאוטולוגיה, מתקבל שאם $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ אינה קונסיסטנטית אז $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$. לכן, אם $\Gamma \cup \{\phi\}$ ו- $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ אינן קונסיסטנטיות אז $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi, \neg\phi$, ומכיוון ש- $\phi, \neg\phi \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi \wedge \neg\phi$ קיים $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi \wedge \neg\phi$ בניגוד להנחה ש-Γ קונסיסטנטית, כי $\phi \wedge \neg\phi$ היא סתירה טאוטולוגית.

ב. נניח שהקבוצה $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ אינה קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$, ואז תהי $\phi_1, \ldots, \phi_n$ הוכחה של סתירה טאוטולוגית σ מ- $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. יהיו $\psi_1, \ldots, \psi_m$ הפסוקים בסדרה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ הנמצאים ב- $\bigcup_{i}^{\infty} \Gamma_i$ ואז הסדרה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ היא גם הוכחה מ- $\psi_1, \ldots, \psi_m$. לכל $1 \le k \le m$ קיים $\psi_k \in \bigcup_{i}^{\infty} \Gamma_i$ ולכן קיים $m \ge i_k \ge 1$ כך ש- $\psi_k \in \Gamma_{i_k}$. יהי j המספר המירבי מבין $i_1, \ldots, i_m$. קיים לכן לכל $1 \le k \le m \quad i_k \le j$, ולכן, לפי הנתון במשפט $\psi_k \in \Gamma_{i_k} \subseteq \Gamma_j$. לכן הסדרה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ היא גם הוכחה ב-$\mathfrak{D}_0$ של הסתירה הטאוטולוגית σ מ-Γ_j, בניגוד להנחה ש-Γ_j קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

תשובה חלופית. אם הקבוצה $\gamma \cup \{\phi\}$ אינה קונסיסטנטית אז קיימים פסוקים $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma \cup \{\phi\}$ כך ש- $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$. לא ייתכן שכל הפסוקים $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ הם ב-Γ כי Γ קונסיסטנטית, לכן אחד הפסוקים $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ הוא ϕ, וללא הגבלת הכלליות זהו הפסוק γ_n, וכך $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \phi)$. באותו אופן, אם הקבוצה $\gamma \cup \{\neg\phi\}$ אינה קונסיסטנטית אז קיימים פסוקים $\delta_1 \ldots \delta_{m-1} \in \Gamma$ כך ש- $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_{m-1} \wedge \neg\phi)$. שימוש בכלל ההיסק של הקשר $\wedge$ נותן $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \phi) \wedge \neg(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_{m-1} \wedge \neg\phi)$. הפסוק

$\neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \phi) \wedge \neg(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_{m-1} \wedge \neg\phi) \to \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_{m-1})$

הוא טאוטולוגיה ולכן הוא יכיח ב-$\mathfrak{D}_0$. הפעלה של כלל הניתוק נותנת

$\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_{m-1})$, בסתירה לקונסיסטנטיות Γ.

ב. אם $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ אינה קונסיסטנטית אז קיימים פסוקים $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ כך ש- $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$. לכל $1 \le k \le n$ קיים $\gamma_k \in \bigcup_{i}^{\infty} \Gamma_i$ ולכן קיים $n \ge i_k \ge 1$ כך ש- $\gamma_k \in \Gamma_{i_k}$. יהי j המספר המירבי מבין $i_1, \ldots, i_n$. קיים לכן לכל $1 \le k \le n \quad i_k \le j$, ולכן, לפי הנתון במשפט $\gamma_k \in \Gamma_{i_k} \subseteq \Gamma_j$. מכיוון ש- $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$ Γ_j אינה קונסיסטנטית, בניגוד להנחתנו.

4. תהי L שפה לתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים בה הם n הפסוקים $P_1, \ldots, P_n$ בלבד. מהו המספר המירבי k כך שקיימת בשפה זאת סדרת פסוקים $\phi_1, \ldots, \phi_k$ כך שלכל $i < k$ $\phi_i \models \phi_{i+1}$ אולם לא $\phi_i \equiv \phi_{i+1}$? הוכח את טענתך.

תשובה. נוכיח ש-k מירבי זה הוא $2^n + 1$. להוכחה זאת שני חלקים. בחלק הראשון נצביע על סדרת פסוקים מסויימת באורך $2^n + 1$, ובחלק השני נוכיח שכל סדרת פסוקים $\phi_1, \ldots, \phi_k$ כמו בשאלה היא באורך $\le 2^n + 1$. נביא שתי הוכחות, כאשר לכל אחת יש שני חלקים כאלו, ואפשר גם להשתמש בחלק אחד מכל הוכחה.

הוכחה ראשונה. לפסוק ϕ נסמן ב- $\mathrm{Models}(\phi)$ את קבוצת המודלים של ϕ, וב- $\mathrm{m}(\phi)$ את מספר המודלים של ϕ. לפי משפטים מוכרים קיים ש-

$\psi \models \phi$ אםם $\mathrm{Models}(\phi) \subseteq \mathrm{Models}(\psi)$, ו- $\psi \equiv \phi$ אםם $\mathrm{Models}(\phi) = \mathrm{Models}(\psi)$.

לכן $\psi \models \phi$ ו- $\psi \not\equiv \phi$ אםם $\mathrm{Models}(\phi) \subsetneq \mathrm{Models}(\psi)$.

חלק ראשון. מכיוון שמבנה הוא פונקציה מן הקבוצה $P_1, \ldots, P_n$ שמספר איבריה n לקבוצה $\{T, F\}$ שמספר איבריה 2, לכן קיימים לשפה L 2^n מבנים שונים. לכל פסוק ψ נסמן $\psi^{(T)} = \psi$ ו- $\psi^{(F)} = \neg\psi$. לכל מבנה $\mathcal{A}$ $\psi_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{(\mathcal{A}(P_i))}$ הוא פסוק ש-$\mathcal{A}$ הוא המודל היחיד שלו (עובדה זאת ידועה, וקלה מאוד להוכחה). מכיוון שמבנה הוא מודל של אווי אםם הוא מודל של אחד מרכיביו, לכן לכל קבוצת מבנים J המודלים של הפסוק $\psi_J = \bigvee_{\mathcal{A} \in J} \psi_{\mathcal{A}}$ הם בדיוק איברי J, וזה נכון גם כאשר הקבוצה J היא ריקה. (אפשר גם לשים לב ש- ψ_J הוא פסוק בצורת אווי נורמלית כי $\psi_J = \bigvee_{\mathcal{A} \in J} \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{(\mathcal{A}(P_i))}$). יהי $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{2^n}$ סידור כלשהו של המבנים ל-L, ול- $0 \leq i \leq 2^n$ יהי $J_i = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_i\}$ $(J_0 = \emptyset)$ ויהי $\phi_i = \psi_{J_i}$, ולכן $\mathrm{Models}(\phi_i) = J_i$. ברור כי לכל $i < 2^n$ $J_i \subsetneq J_{i+1}$, כלומר $\mathrm{Models}(\phi_i) \subsetneq \mathrm{Models}(\phi_{i+1})$, והסדרה $\phi_0 \ldots \phi_{2^n}$, שמספר איבריה $2^n + 1$, היא כנדרש.

חלק שני. תהי $\phi_1, \ldots, \phi_k$ סדרה כנדרש, ואז לכל $1 \leq i < k$ $\mathrm{Models}(\phi_i) \subsetneq \mathrm{Models}(\phi_{i+1})$, ומכאן $\mathrm{m}(\phi_i) < \mathrm{m}(\phi_{i+1})$. מכיוון שמספר כל המבנים הוא 2^n לכן הסדרה $\mathrm{m}(\phi_1), \mathrm{m}(\phi_2), \ldots, \mathrm{m}(\phi_k)$ היא סדרה עולה של מספרים טבעיים (כולל 0) שאינם גדולים מ-2^n. האורך k של סדרה כזאת הוא לכל היותר $2^n + 1$ (כי בכל סדרה עולה $\langle a_i \mid 1 \leq i \leq k \rangle$ של מספרים קיים לכל i $a_i \geq i - 1$ ולכן $2^n \geq a_k \geq k - 1$, כלומר $k \leq 2^n + 1$).

הוכחה שניה - חלק ראשון. אם j היא n-יה של ערכי אמת נסמן את רכיביה ב- $j(1), \ldots, j(n)$. לקבוצה J של n-יות של ערכי אמת נסמן ב-χ_J את הפסוק בצורת אווי נורמלית $\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{(j(i))}$. כפי שידוע הפסוק $\bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{(j(i))}$ אמיתי במבנה $\mathcal{A}$ אםם $j = \langle \mathcal{A}(P_1), \ldots, \mathcal{A}(P_n) \rangle$, ולכן:

(1) האיווי χ_J אמיתי במבנה $\mathcal{A}$ אםם $\langle \mathcal{A}(P_1), \ldots, \mathcal{A}(P_n) \rangle \in J$.

מספר ה-n-יות של ערכי האמת הוא 2^n, נסמן אותן, בסידור כלשהו, ב- $j_1, \ldots, j_{2^n}$, ועבור $0 \leq m \leq 2^n$ $J_m = \{j_1, \ldots, j_m\}$ $(J_0 = \emptyset)$, ו- $\phi_m = \chi_{J_m}$. נראה כי הסדרה $\phi_0, \ldots, \phi_{2^n}$, שאורכה $2^n + 1$, היא כנדרש. מכיוון ש- $J_{m+1} = J_m \cup \{j_{m+1}\}$ קיים $\phi_{m+1} = \phi_m \vee \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{(j_{m+1}(i))}$. מכאן ברור כי $\phi_m \models \phi_{m+1}$. מצד שני, אם $\mathcal{A}$ הוא המבנה המוגדר ע"י $\mathcal{A}(P_i) = j_{m+1}(i)$, לכל $1 \leq i \leq n$, אז הפסוק ϕ_{m+1} אמיתי בו כי רכיב האיווי הימני שלו אמיתי ב-$\mathcal{A}$, ואילו לפי (1) הפסוק ϕ_m אינו אמיתי ב-$\mathcal{A}$ כי $\phi_m = \chi_{J_m}$, וה-n-יה $\langle \mathcal{A}(P_1), \ldots, \mathcal{A}(P_n) \rangle = j_{m+1}$ אינה נמצאת ב- J_m. לכן $\phi_{m+1} \not\models \phi_m$.

חלק שני. תהי $\phi_1, \ldots, \phi_k$ סדרה כנדרש. לפי משפט שהוכח, כל פסוק שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $P_1, \ldots, P_n$ שקול לפסוק בצורת אווי נורמלית בפסוקים $P_1, \ldots, P_n$. לכן אנו יכולים להחליף את כל הפסוקים בסדרה בפסוקים בצורת אווי נורמלית ועדיין היא תקיים את דרישותינו. לכן אנו יכולים להניח שכל פסוקי הסדרה הם בעצמם פסוקים בצורת אווי נורמלית ב- $P_1, \ldots, P_n$. יהי $1 \leq m < k$ ויהיו $\phi_m = \chi_J$, $f_{m+1} = \chi_L$, בסימון של החלק הראשון, כאשר J ו-L הן קבוצות של n-יות של ערכי אמת, ואז, לפי הנתון, $\chi_J \models \chi_L$ אולם $\chi_L \not\models \chi_J$. ל-$n$-יה j של ערכי אמת נסמן ב- $\mathcal{A}_j$ את המבנה המוגדר ע"י $\langle \mathcal{A}(P_1), \ldots, \mathcal{A}(P_n) \rangle = j$. אם $j \in J$ אז, לפי (1) χ_J אמיתי ב-$\mathcal{A}_j$. מכיוון ש- $\chi_J \models \chi_L$ גם χ_L אמיתי ב-$\mathcal{A}_j$. לפי (1) קיים $j \in L$. כך הוכחנו כי $J \subseteq L$.

מכיוון ש- $\chi_L \not\models \chi_J$ קיים מבנה $\mathcal{A}$ כך ש-χ_L אמיתי ב-$\mathcal{A}$ ואולם χ_J אינו אמיתי בו. לכן לפי (1)

ה-n-יה $\langle \boldsymbol{A}(P_1), \ldots, \boldsymbol{A}(P_n) \rangle$ נמצאת ב-L ואינה נמצאת ב-J, ולכן $J \subsetneq L$, ולכן מספר איברי J קטן ממספר איברי L, כלומר מספר רכיבי האיווי ב-ϕ_m קטן מזה שב-ϕ_{m+1}. לכן אם נסמן ב-$d(m)$ את מספר רכיבי האיווי ב-ϕ_m אז $d(1), \ldots, d_(k)$ היא סידרה עולה של מספרים טבעיים. מספר רכיבי האווי בפסוק בצורת אווי נורמלית הוא לכל היותר 2^n, שזהו מספר ה-n-יות של ערכי האמת, ולכן $d(n) \leq 2^n$. סידרה עולה של מספרים טבעיים שהם $\geq 2^n$ היא באורך לכל היותר $2^n + 1$ ולכן $k \leq 2^n + 1$ (כי באינדוקציה $d(i) \geq i - 1$ ולכן $k - 1 \leq d(k) \leq 2^n$).